Untersuchung

über die

geometrischen Eigenschaften des Schwerpunkts

von

Parabel-Dreiecken und Segmenten.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

bei

Hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Karl Israel

aus Fritzlar.

Cassel.

Druck von Gebrüder Gotthelft.

1871.

Herrn Carl Adelhard von Drach,

Dr. phil. und Privatdocent der Mathematik an der Universität zu Marburg,

hochachtungsvoll

gewidmet

vom

Verfasser.

§. 1.

Wenn die vorliegende Arbeit eine Untersuchung über die geometrischen Eigenschaften des Schwerpunktes von Parabeldreiecken genannt wird, so muß vorausgeschickt werden, daß dieser Ausdruck hier nicht in seiner weitesten Bedeutung zu nehmen ist, in der er alle aus Tangenten und Sehnen beliebig construirten Dreiecke umfaßt, daß vielmehr solche Dreiecke, die aus einer Verbindung zweier Sehnen mit einer Tangente hervorgehen, von unserer Betrachtung durchgängig ausgeschlossen bleiben. Denn obwohl auch deren Schwerpunkte mit dem Bildungsgesetze der Parabel in einem nothwendigen und leicht nachweisbaren Zusammenhange stehen, so kommt diesem letztern doch nicht derjenige Grad von Einfachheit zu, den man von einem irgend beachtenswerthen mathematischen Lehrsatze mit Recht zu erwarten pflegt. — Es muß ferner gleich von vornherein betont werden, daß aus Gründen, die in der Sache selbst liegen, es nicht sowohl die Aufgabe der nachstehenden Abhandlung sein wird, die Schwerpunktseigenschaften einer einzelnen Gattung von Parabeldreiecken, etwa der Tangentendreiecke, als die Beziehungen zu ermitteln, die zwischen den Schwerpunkten einer bestimmten, durch dieselben drei Parabelpunkte verbundenen Gruppe von Dreiecken verschiedener Art hervortreten, daß uns mit einem Worte weniger die absoluten als die relativen Schwerpunktseigenschaften beschäftigen werden. Wenn bei dieser Gelegenheit auch der Schwerpunkte der Parabelsegmente gedacht wird, so hat dies vorzugsweise darin seinen Grund,, weil dieselben

mit den Schwerpunkten der correspondirenden Dreiecke durch ein enges mathematisches Band, durch die Beziehung der Harmonie nämlich, verknüpft sind.

Hiernach sei

$$y^2 = px$$

die Gleichung der Parabel und zwar, was in der folgenden Untersuchung, insofern wir nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerken, stets stillschweigend angenommen wird, auf ein rectanguläres Coordinatensystem bezogen.

Es seien ferner:

$$x_, y_, \; ; \; x_{,,} y_{,,} \; ; \; x_{,,,} y_{,,,}$$

die Coordinaten der drei gegebenen Parabelpunkte $a_,$; $a_{,,}$; $a_{,,,}$ (Fig. 1). Dann sind die Gleichungen der durch diese Punkte bestimmten Sehnen:

$$(y_, + y_{,,})\, y - px - y_, y_{,,} = 0$$
$$(y_, + y_{,,,})\, y - px - y_, y_{,,,} = 0$$
$$(y_{,,} + y_{,,,})\, y - px - y_{,,} y_{,,,} = 0,$$

während die Gleichungen der denselben Punkten entsprechenden Tangenten die Form haben:

$$2yy_, - p\,(x + x_,) = 0$$
$$2yy_{,,} - p\,(x + x_{,,}) = 0$$
$$2yy_{,,,} - p\,(x + x_{,,,}) = 0.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden durch die Punkte $x_, y_,$; $x_{,,} y_{,,}$ gelegten Berührungslinien, zugleich die Coordinaten des Eckpunktes $A_,$ des Tangentendreiecks $A_, A_{,,} A_{,,,}$ sind demgemäß:

$$\alpha_, = \frac{y_, y_{,,}}{p} \; ; \; \beta_, = \frac{y_, + y_{,,}}{2}$$

In ähnlicher Weise hat man für die Durchschnittscoordinaten der beiden anderen, die Parabel bezw. in den Punkten $x_, y_,$, $x_{,,,} y_{,,,}$; $x_{,,} y_{,,}$, $x_{,,,} y_{,,,}$; berührenden Tangentenpaare, oder, was dasselbe ist, für die Coordinaten der beiden Eckpunkte $A_{,,}$ und $A_{,,,}$ des Tangentendreiecks:

$$\alpha_{\prime\prime} = \frac{y_\prime y_{\prime\prime\prime}}{p}, \beta_{\prime\prime} = \frac{y_\prime + y_{\prime\prime\prime}}{2}$$

$$\alpha_{\prime\prime\prime} = \frac{y_{\prime\prime} y_{\prime\prime\prime}}{p}, \beta_{\prime\prime\prime} = \frac{y_{\prime\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{2}$$

Da die Gleichungen der drei, bekanntlich sich in einem Punkte durchschneidenden Mittellinien des Dreiecks $A_\prime A_{\prime\prime} A_{\prime\prime\prime}$ dargestellt werden durch:

$$\frac{2y_{\prime\prime\prime} - y_\prime - y_{\prime\prime}}{2} x - \frac{y_\prime y_{\prime\prime\prime} + y_{\prime\prime} y_{\prime\prime\prime} - 2 y_\prime y_{\prime\prime}}{p} y + \frac{y_\prime^2 (y_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime}) + y_{\prime\prime}^2 (y_{\prime\prime\prime} - y_\prime)}{2p} = 0$$

$$\frac{2y_{\prime\prime} - y_\prime - y_{\prime\prime\prime}}{2} x - \frac{y_\prime y_{\prime\prime} + y_{\prime\prime} y_{\prime\prime\prime} - 2 y_\prime y_{\prime\prime\prime}}{p} y + \frac{y_\prime^2 (y_{\prime\prime} - y_{\prime\prime\prime}) + y_{\prime\prime\prime}^2 (y_{\prime\prime} - y_\prime)}{2p} = 0$$

$$\frac{2y_\prime - y_{\prime\prime} - y_{\prime\prime\prime}}{2} x - \frac{y_\prime y_{\prime\prime} + y_\prime y_{\prime\prime\prime} - 2 y_{\prime\prime} y_{\prime\prime\prime}}{p} y + \frac{y_{\prime\prime}^2 (y_\prime - y_{\prime\prime\prime}) + y_{\prime\prime\prime}^2 (y_\prime - y_{\prime\prime})}{2p} = 0,$$

so ergeben sich als Coordinaten ihres gemeinsamen Durchschnitts, d. h. des Schwerpunktes vom Tangentendreieck:

$$\lambda_0 = \frac{y_\prime y_{\prime\prime} + y_\prime y_{\prime\prime\prime} + y_{\prime\prime} y_{\prime\prime\prime}}{3p}, \mu_0 = \frac{y_\prime + y_{\prime\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{3} \quad \ldots \; (1)$$

Andererseits werden die Coordinaten des analogen Punktes im Sehnendreiecke $a_\prime a_{\prime\prime} a_{\prime\prime\prime}$ ausgedrückt durch:

$$\varrho_0 = \frac{y_\prime^2 + y_{\prime\prime}^2 + y_{\prime\prime\prime}^2}{3p}, \sigma_0 = \frac{y_\prime + y_{\prime\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{3} \quad \ldots\ldots \; (2),$$

wenn man nämlich die drei Specialwerthe $x_\prime, x_{\prime\prime}, x_{\prime\prime\prime}$, durch die gleichwerthigen Ausdrücke:

$$\frac{y_\prime^2}{p}, \frac{y_{\prime\prime}^2}{p}, \frac{y_{\prime\prime\prime}^2}{p}$$

ersetzt.

Aus einer Vergleichung der Relationen (1) und (2) erkennt man nun ohne Weiteres die Identität der Werthe von μ_0 und σ_0, d. h. die Identität der beiden Schwerpunktsordi=

ten. Die gefundene Beziehung in Worten ausgedrückt lautet:

Der Schwerpunkt des Tangentendreiecks $A_{,}A_{,,}A_{,,,}$ liegt mit dem Schwerpunkte des correspondirenden Sehnendreiecks $a_{,}a_{,,}a_{,,,}$ in einer mit der Parabelaxe gleichlaufenden Geraden, d. h. in demselben Parabeldurchmesser.

§. 2.

Diese den Schwerpunkten des Tangenten- und des zugehörigen Sehnendreiecks gemeinschaftliche Gerade wird von der Parabel in einem Punkte getroffen, dessen Ordinate

$$y_0 = \mu_0 = \sigma_0,$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$= \frac{y_{,} + y_{,,} + y_{,,,}}{3},$$

so daß seine Abscisse x_0, gemäß der Gleichung der Parabel,

$$= \frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 + 2y_{,}y_{,,} + 2y_{,,}y_{,,,} + 2y_{,}y_{,,,}}{9p}$$

ist.

Nun besteht für die Strecke ts zwischen dem Schwerpunkte t des Tangenten- und dem Schwerpunkte s des Sehnendreiecks augenscheinlich die Relation:

$$ts = \sigma_0 - \lambda_0,$$

Dagegen für die Strecke tk zwischen demselben Schwerpunkt t und dem Parabelpunkt k die Beziehung:

$$tk = x_0 - \lambda_0,$$

Durch Substitution der oben erhaltenen Werthe entspringt hieraus:

$$ts = \frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 - y_{,}y_{,,} - y_{,,}y_{,,,} - y_{,}y_{,,,}}{3p}$$

$$tk = \frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 + 2(y_{,}y_{,,} + y_{,,}y_{,,,} + y_{,}y_{,,,})}{9p}$$

$$- \frac{y_{,}y_{,,} + y_{,,}y_{,,,} + y_{,}y_{,,,}}{3p}$$

$$= \frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 - y_{,}y_{,,} - y_{,,}y_{,,,} - y_{,}y_{,,,}}{9p},$$

d. h. $ts = \frac{1}{3}$ tk, in Worten:

Der Parabelpunkt theilt die von den Schwerpunkten des Tangenten- und des Sehnendreiecks umfaßte Strecke nach dem Verhältniß von 1:2, in der Weise, daß der größere der beiden Streckentheile im Sehnendreieck endigt.

§. 3.

Die Eckpunktscoordinaten der drei, je aus zwei Tangenten und einer Sehne entstehenden Dreiecke $A_{,,}a_{,}a_{,,,}$, $A_{,}a_{,}a_{,,}$, $A_{,,,}a_{,,}a_{,,,}$ werden sich nach dem Vorstehenden folgendermaßen gestalten:

$$y_{,,}\ \frac{y_{,}^2}{p};\quad y_{,,,}\ \frac{y_{,,,}^2}{p};\quad \frac{y_{,}y_{,,,}}{p},\ \frac{y_{,}+y_{,,,}}{2};$$

$$y_{,,}\ \frac{y_{,}^2}{p};\quad y_{,,,}\ \frac{y_{,,}^2}{p};\quad \frac{y_{,}y_{,,}}{p},\ \frac{y_{,}+y_{,,}}{2};$$

$$y_{,,,}\ \frac{y_{,,}^2}{p};\quad y_{,,,}\ \frac{y_{,,,}^2}{p};\quad \frac{y_{,,}y_{,,,}}{p},\ \frac{y_{,,}+y_{,,,}}{2};$$

während der analytische Ausdruck für den Schwerpunkt des Dreiecks $A_{,,}a_{,}a_{,,,}$ ist:

$$\gamma_0 = \frac{y_{,}^2 + y_{,,,}^2 + y_{,}y_{,,,}}{3\,p};\quad \delta_0 = \frac{y_{,} + y_{,,,}}{2},$$

für den Schwerpunkt des Dreiecks $A_{,}a_{,}a_{,,}$:

$$\gamma_{,} = \frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,}y_{,,}}{3\,p};\quad \delta_{,} = \frac{y_{,} + y_{,,}}{2},$$

für den gleichen Punkt des Dreiecks $A_{,,,}a_{,,}a_{,,,}$:

$$\gamma_{,,} = \frac{y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 + y_{,,}y_{,,,}}{3\,p};\quad \delta_{,,} = \frac{y_{,,} + y_{,,,}}{2}.$$

Bekanntlich enthält die Gleichung

$$m_{,}(n_{,,} - n_{,,,}) + m_{,,}(n_{,,,} - n_{,}) + m_{,,,}(n_{,} - n_{,,}) = 0$$

die Bedingung, welcher genügt werden muß, wenn die drei Punkte $m_{,}n_{,}$; $m_{,,}n_{,,}$; $m_{,,,}n_{,,,}$; in derselben Geraden liegen sollen. Auf die Schwerpunkte der drei Tangentialsehnendreiecke angewendet, erhalten wir in

$$\frac{y_{,}^2 + y_{,,,}^2 + y_{,}y_{,,,}}{3\,p}\left(\frac{y_{,} + y_{,,}}{2} - \frac{y_{,,} + y_{,,,}}{2}\right)$$

$$+\frac{y_,^2+y_{,,}^2+y_,y_{,,}}{3p}\left(\frac{y_{,,}+y_{,,,}}{2}-\frac{y_,+y_{,,,}}{2}\right)$$

$$+\frac{y_{,,}^2+y_{,,,}^2+y_{,,}y_{,,,}}{3p}\left(\frac{y_,+y_{,,,}}{2}-\frac{y_,+y_{,,}}{2}\right)$$

einen Ausdruck, von dem sich leicht zeigen läßt, daß er in der That mit der Null identisch ist. Hieraus erhellt aber sofort, daß die Schwerpunkte der drei Tangentialsehnendreiecke auf derselben Geraden fh liegen.

§. 4.

Bestimmen wir weiter die Gleichungen der beiden Geraden ts und fh, von denen die eine, wie wir wissen, parallel zur Parabelaxe geht und die Schwerpunkte des Tangenten- und des Sehnendreiecks, die andere die Schwerpunkte der drei Tangentialsehnendreiecke enthält, so ergibt sich, wenn man die laufenden Coordinaten von fh mit ω, ν, die Ordinate von ts mit η bezeichnet und erwägt, daß der Abstand der ts von der Axe (nach §. 1) gleich $\frac{y_,+y_{,,}+y_{,,,}}{3}$ ist, sowie daß fh durch die Punkte $\gamma_0\,\delta_0$, $\gamma,\,\delta,$ (§. 3) lauft:

$$\eta=\frac{y_,+y_{,,}+y_{,,,}}{3}$$

$$\frac{\omega-\frac{y_,+y_{,,,}}{2}}{\nu-\frac{y_,^2+y_{,,,}^2+y_,y_{,,,}}{3p}}=\frac{\frac{y_,+y_{,,}}{2}-\frac{y_,+y_{,,,}}{2}}{\frac{y_,^2+y_{,,}^2+y_,y_{,,}}{3p}-\frac{y_,^2+y_{,,,}^2+y_,y_{,,,}}{3p}}$$

Für die Coordinaten $\omega,\ \nu,$ des Durchschnittspunktes 1 dieser beiden Geraden findet man:

$$\omega,=\frac{y_,+y_{,,}+y_{,,,}}{3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

$$\nu,=\frac{2(y_,^2+y_{,,}^2+y_{,,,}^2)+y_,y_{,,}+y_{,,}y_{,,,}+y_,y_{,,,}}{9p}.\ (4)$$

Da nun der Strecke ts nach §. 2 der Werth

$$\frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 - y_{,}y_{,,} - y_{,,}y_{,,,} - y_{,}y_{,,,}}{3p}$$

zukommt, die Strecke tl aber offenbar durch $\nu_{,} - \lambda_0$ (§. 1), d. h. durch

$$\frac{2y_{,}^2 + 2y_{,,}^2 + 2y_{,,,}^2 + y_{,}y_{,,} + y_{,,}y_{,,,} + y_{,}y_{,,,}}{9p}$$

$$- \frac{y_{,}y_{,,} + y_{,,}y_{,,,} + y_{,}y_{,,,}}{3p}$$

$$= \frac{2(y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 - y_{,}y_{,,} - y_{,,}y_{,,,} - y_{,}y_{,,,})}{9p}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 - y_{,}y_{,,} - y_{,,}y_{,,,} - y_{,}y_{,,,}}{3p}$$

dargestellt wird, so folgt:

$$tl = \frac{2}{3} ts.$$

Also: Die durch die Schwerpunkte der drei Tangentialsehnendreiecke sich erstreckende Gerade fh begegnet der durch die Schwerpunkte des Tangenten- und des Sehnendreiecks laufenden Geraden ts in einem Punkte l, dessen Abstand von t, dem Schwerpunkte des Tangentendreiecks, sich zum Abstande von s, dem Schwerpunkte des Sehnendreiecks, verhält wie 2 : 1.

§. 5.

Wird nun ferner der Schwerpunkt $\gamma_{,,,}$ $\delta_{,,,}$ der drei homogen gedachten Punkte $\gamma_0\,\delta_0; \gamma_{,}\,\delta_{,}; \gamma_{,,}\,\delta_{,,}$ gesucht, welche letztere selbst wieder, wie man sich aus §. 3 erinnern wird, die Schwerpunkte der drei Tangentialsehnendreiecke $A_{,,}\,a_{,}\,a_{,,,}$, $A_{,}\,a_{,}\,a_{,,}$, $A_{,,,}\,a_{,,}\,a_{,,,}$ darstellen und als solche die Gleichungen

$$\gamma_0 = \frac{y_{,}^2 + y_{,,,}^2 + y_{,}y_{,,,}}{3p}\,;\ \delta_0 = \frac{y_{,} + y_{,,,}}{2}\,,$$

$$\gamma_{,} = \frac{y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,}y_{,,}}{3p}\,;\ \delta_{,} = \frac{y_{,} + y_{,,}}{2}\,,$$

$$\gamma_{''} = \frac{y_{''}^2 + y_{'''}^2 + y_{''} y_{'''}}{3\,p}\,;\ \delta_{''} = \frac{y_{''} + y_{'''}}{2}\,,$$

zum Ausdrucke hatten, so hat man nach einem bekannten Lehrsatze zu setzen:

$$\gamma_{'''} = \frac{\gamma_0 + \gamma_{'} + \gamma_{''}}{3}$$

$$= \frac{2(y_{'}^2 + y_{''}^2 + y_{'''}^2) + y_{'} y_{''} + y_{'} y_{'''} + y_{''} y_{'''}}{9\,p}$$

$$\delta_{'''} = \frac{\delta_0 + \delta_{'} + \delta_{''}}{3} = \frac{y_{'} + y_{''} + y_{'''}}{3}.$$

Verglichen mit den Gleichungen (3) und (4) des vorigen Paragraphen ergeben sich die Relationen

$$\gamma_{'''} = \nu,$$
$\delta_{'''} = \omega_{'}$, das heißt:

Die Gerade fh theilt die Strecke ts nicht blos in dem Verhältniß von 1 : 2 (cf. §. 4), ihr Schnittpunkt mit ts bildet zugleich auch den Schwerpunkt von den Schwerpunkten der drei Tangentialsehnendreiecke,

welches Resultat sich mit dem in §. 2 kennen gelernten vereinigen läßt in dem Satze:

Die Strecke ts zwischen den beiden Schwerpunkten t und s wird von dem Parabelpunkte k und dem Schwerpunkte l in drei gleiche Theile zerlegt.

§. 6.

Beginnen wir nun mit der Schwerpunktsbestimmung der drei Parabelsegmente, so ist, indem wir zur Abkürzung

$$t_{'} m_{'} = \xi$$

sowie die Abscisse des Schwerpunkts g vom Segment $a_{'} t_{'} a_{''} m_{'}$, nämlich $t_{'} g = \xi_0$ setzen, nach der bekannten Regel:

$$\xi_0 = \frac{3}{5}\xi\,.$$

Denn auch für die mit der Tangente $t_{'} q$ parallel gezogenen Parabelordinaten η erhält man offenbar:

$$\xi_0 = \frac{\int \xi \eta d\xi}{\int \eta d\xi} = \frac{\int \xi^{3/2} d\xi}{\int \xi^{1/2} d\xi}$$

$$= \frac{3/5\, \xi^{5/2}}{2/3\, \xi^{3/2}} = 3/5\, \xi$$

Da nun der Scheitel $t_,$ des Durchmessers $t_, m$, die Ordinate $y = \frac{y_, + y_{,,}}{2}$, also die Abscisse $\frac{1}{p}\left(\frac{y_, + y_{,,}}{2}\right)^2$, der Punkt m, aber die Abscisse $\frac{x_, + x_{,,}}{2} = \frac{y_,^2 + y_{,,}^2}{2p}$ besitzt, so ist:

$$\xi = \frac{y_,^2 + y_{,,}^2}{2p} - \frac{(y_, + y_{,,})^2}{4p} = \frac{(y_, - y_{,,})^2}{4p}$$

und der Schwerpunkt g hat in Beziehung auf die Hauptaxe der Parabel die Abscisse

$$\frac{1}{p}\left(\frac{y_, + y_{,,}}{2}\right)^2 + \frac{3}{5}\xi = \frac{(y_, + y_{,,})^2}{4p} + \frac{3(y_, - y_{,,})^2}{20p}$$

$$= \frac{2y_,^2 + y_, y_{,,} + 2y_{,,}^2}{5p}.$$

Bezeichnen wir daher die Coordinaten der Schwerpunkte der drei Parabelsegmente nach der Reihe mit $\alpha_, \beta_,$; $\alpha_{,,}, \beta_{,,}$; $\alpha_{,,,} \beta_{,,,}$, so haben wir:

$$\alpha_, = \frac{2y_,^2 + y_, y_{,,} + 2y_{,,}^2}{5p};\ \beta_, = \frac{y_, + y_{,,}}{2}$$

$$\alpha_{,,} = \frac{2y_{,,}^2 + y_{,,} y_{,,,} + 2y_{,,,}^2}{5p};\ \beta_{,,} = \frac{y_{,,} + y_{,,,}}{2}$$

$$\alpha_{,,,} = \frac{2y_,^2 + y_, y_{,,,} + 2y_{,,,}^2}{5p};\ \beta_{,,,} = \frac{y_, + y_{,,,}}{2}.$$

§. 7.

Die in §. 6 entwickelten Coordinaten der drei Segmentsschwerpunkte hatten zum analytischen Ausdrucke die Gleichungen:

$$\alpha_, = \frac{2y_,^2 + y_, y_{,,} + 2y_{,,}^2}{5p};\ \beta_, = \frac{y_, + y_{,,}}{2}$$

$$\alpha_{,,} = \frac{2y_{,,}^2 + y_{,,} y_{,,,} + 2y_{,,,}^2}{5p};\ \beta_{,,} = \frac{y_{,,} + y_{,,,}}{2}$$

$$\alpha_{,,,} = \frac{2y_{,}^2 + y_{,}y_{,,,} + 2y_{,,,}^2}{5p}; \beta_{,,,} = \frac{y_{,} + y_{,,,}}{2}$$

Durch eine Vergleichung dieser β und der aus §. 3 her bekannten δ kommt man zu dem Schlusse, daß die Schwerpunkte der Parabelsegmente mit den Schwerpunkten der bezüglichen Tangentialsehnendreiecke stets in einer Parallelen zur Axe liegen. Es fällt also z. B. der Schwerpunkt des Dreiecks $A_{,}a_{,}a_{,,}$ und des Segments $a_{,,}t_{,}a_{,}$ in $m_{,}t_{,,}$ da diese Gerade nach Voraussetzung parallel der Axe und nachgewiesenermaßen (§. 6) den einen der beiden Schwerpunkte, den des Segments, in sich enthält. Als gleichzeitiger Träger des Schwerpunkts vom Dreieck $A_{,}a_{,,}a_{,}$ muß diese Gerade offenbar eine Schwerlinie des genannten Dreiecks sein und da sie überdies die Seite $a_{,}a_{,,}$ halbirt, muß sie sogar Mittellinie desselben sein, muß sich also durch den Eckpunkt $A_{,}$ bewegen. Man gelangt so zu einem schon von anderer Seite her bekannten Lehrsatze, oder vielmehr zu dessen Umkehrung, daß nämlich eine von der Mitte einer Berührungssehne ausgehende, mit der Parabelaxe gleichlaufende Gerade immer den Durchschnittspunkt der zugehörigen Tangenten trifft.

§. 8.

Die drei Segmentsschwerpunkte bestimmen ein Dreieck, dessen Schwerpunkt nach der Regel

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_{,} + \alpha_{,,} + \alpha_{,,,}}{3}; \beta_4 = \frac{\beta_{,} + \beta_{,,} + \beta_{,,,}}{3}$$

zu suchen ist.

Werden die in §. 6 entwickelten Werthe in die vorstehenden Gleichungen eingesetzt, so kommt:

$$\alpha_4 = \frac{4(y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2) + y_{,}y_{,,} + y_{,,}y_{,,,} + y_{,}y_{,,,}}{15p} \quad . . (9)$$

$$\beta_4 = \frac{y_{,} + y_{,,} + y_{,,,}}{3} \quad . . . . (10)$$

Aus Gleichung (10) geht hervor, daß der Schwerpunkt ($\alpha_4 \beta_4$) gleichfalls auf die Gerade ts zu liegen kommt, während aus Gleichung (9) gefolgert werden muß, daß dieser

Punkt m die Strecke ts nach dem Verhältniß 4:1 theilt, in der Weise, daß der größere der beiden Abschnitte durch den Schwerpunkt t des Tangentendreiecks begrenzt wird. Denn es leuchtet ein, daß die Strecke tm gemessen wird durch die algebraische Summe der Abscissen der beiden Punkte t und m, daß also die Gleichung besteht:

$$\mathrm{mt} = \alpha_4 - \lambda_0 \ (\S.\ 1)$$

$$= \frac{4(y_,^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2) + y_, y_{,,} + y_{,,} y_{,,,} + y_, y_{,,,}}{15\,p}$$

$$- \frac{y_, y_{,,} + y_{,,} y_{,,,} + y_, y_{,,,}}{3\,p}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{y_,^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 - y_, y_{,,} - y_{,,} y_{,,,} - y_, y_{,,,}}{3\,p}$$

während $\mathrm{ts} = \dfrac{y_,^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 - y_, y_{,,} - y_{,,} y_{,,,} - y_, y_{,,,}}{3\,p}$,

woraus alsbald erhellt:

$$\mathrm{mt} = \frac{4}{5}\,\mathrm{ts}.$$

§. 9.

Blicken wir auf das Ergebniß unserer bisherigen Betrachtungen zurück, so läßt sich dasselbe, wie folgt, aussprechen:

Die durch die gegebenen Parabelpunkte $a_,, a_{,,}, a_{,,,}$ geführten Tangenten, sowie die entsprechenden Berührungssehnen bilden theils unter sich, theils in Verbindung mit einander eine Anzahl von Dreiecken, die Berührungssehnen noch insbesondere begrenzen drei Parallelsegmente, deren Schwerpunkte in einem bemerkenswerthen Zusammenhange stehen. Es liegen nämlich:

1. Der Schwerpunkt des Tangentendreiecks $A_{,,} A_, A_{,,,}$,
2. Der des Sehnendreiecks $a_, a_{,,} a_{,,,}$,
3. Der zu den Schwerpunkten der drei Tangentialsehnendreiecke $A_{,,} a_, a_{,,,}$, $A_, a_, A_{,,}$, $A_{,,,} a_{,,} a_{,,,}$

4. Der zu den gleichen Punkten der drei Parabelsegmente gehörige Schwerpunkt

in einer und derselben zur Parabelaxe parallelen Geraden ts und zwar dergestalt, daß die Strecke zwischen den beiden ersten Schwerpunkten von den zwei anderen Schwerpunkten beziehungsweise in den Verhältnissen von 2 : 1 und 4 : 1 getheilt wird, wobei jedesmal der Schwerpunkt t des Tangentendreiecks den größern Streckentheil mitbegrenzen hilft.

Nicht minder überraschend sind die weiteren Thatsachen, einmal, daß die durch den Schwerpunkt des Tangendreiecks und der Tangentialsehnendreiecke abgeschlossenen Strecke tl von dem Parabelpunkte k halbirt wird, sodann auch, daß die Schwerpunkte sämmtlicher Tangentialsehnendreiecke stets in dieselbe Gerade fallen.

§. 10.

Vermöge der im Vorhergehenden dargelegten constanten Beziehungen läßt sich nun auch der nachstehende Satz unmittelbar als gewiß einsehen:

Construirt man um einen beliebigen Punkt der Parabelfläche alle möglichen Sehnendreiecke, die den angenommenen Punkt zum Schwerpunkt haben, so haben auch die sämmtlichen dieser Dreiecksreihe entsprechenden Tangentendreiecke einen gemeinsamen Schwerpunkt, ingleichen die gesammten Gruppen von Tangentialsehnendreiecken und Parabelsegmenten. Es könnte hierbei nur die Frage aufgeworfen werden, ob die Voraussetzung auch wirklich statthaft erscheint, d. h., ob sich überhaupt verschiedene Sehnendreiecke angeben lassen, die ohne Ausnahme den beliebig gewählten Parabelflächenpunkt zum Schwerpunkte haben, eine Frage, die dahin beantwortet werden muß, daß allerdings jeder Punkt der Parabelcurve im Allgemeinen sich als Eckpunkt eines

Sehnendreiecks betrachten läßt, dessen Schwerpunkt mit dem angenommenen Punkt der Parabelfläche zusammenfällt. Dies führt uns auf folgende Aufgabe.

§. 11.

Aufgabe.

Gegeben (Fig. 2) zwei Punkte s und a, der eine in der Fläche, der andere in der Curve der Parabel. Es soll ein Sehnendreieck construirt werden, dessen einer Eckpunkt mit a, dessen Schwerpunkt mit s coincidirt.

Determination.

Man ziehe die Gerade asb, die zufolge unserer Voraussetzung eine Mittellinie des gesuchten Dreiecks werden wird. Trägt man die Hälfte der Strecke as nach b hin ab, so daß sm = ½ as, so ist klar, daß eine Dreiecksseite jedenfalls durch den Punkt m gehen muß. Die Möglichkeit einer Lösung ist mithin an die Bedingung geknüpft, daß ½ as < sb.

Auflösung.

Es kommt augenscheinlich also nur noch darauf an, durch m eine Sehne zu legen, deren Halbirungspunkt zugleich m ist, eine Aufgabe, die keine Schwierigkeiten darbietet, wenn man sich die Eigenschaften der Parabeldurchmesser vergegenwärtigt. Man hat nur nöthig, durch m den Durchmesser cd, sodann im Punkte c die zugeordnete Tangente und endlich durch m die mit dieser Tangente parallele Sehne fg zu ziehen, dann erhält man in fag das gewünschte Dreieck.

Die Richtigkeit der Construction ist ohne Weiteres ersichtlich.

§. 12.

Wäre das verlangte Dreieck, dessen Schwerpunkt in s liegen soll, nicht gerade der Bedingung unterworfen, einen bestimmten Punkt der Parabelcurve zum Eckpunkte haben zu müssen, sondern etwa der Bedingung, daß eine seiner Seiten senkrecht zur Axe stehen soll, so kann man sich nachstehender Construction bedienen (Fig. 3):

Man verlängere die Ordinate sh des Schwerpunktes

bis c, so daß sh = 1/3 hc, ziehe hierauf cb | der Axe ag, verbinde den Parabelpunkt b mit s, verlängere diese Verbindungslinie bis zur Axe, errichte in dem Durchschnittspunkte a mit der Axe die Senkrechte ed, dann ist edb das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet. Führt man nämlich sf || ag, so folgt

$$bs : ba = bf : bg = cs : ch = 2 : 3.$$

Andererseits ist aber auch ea = ad, weil ed $\perp$ ag. Mithin ist s der Schwerpunkt des Dreiecks edb, dessen eine Seite ed perpendikulär zur Axe steht.

§. 13.

Wir haben bisher die Lage der drei Parabelpunkte $a_{,} a_{,,} a_{,,,}$ als unveränderlich vorausgesetzt. Nunmehr wollen wir annehmen, einer derselben sei beweglich.

Alsdann wird jede Ortsveränderung des Parabelpunktes auch eine entsprechende Aenderung in der Lage der früher betrachteten vier Schwerpunkte bewirken. Durchlauft jener Punkt die gegebene Parabelcurve, so wird auch jeder der vier Schwerpunkte einen bestimmten geometrischen Ort erzeugen. Es wird die Aufgabe der folgenden Paragraphen sein, die Natur dieser Schwerpunktswege zu ermitteln und dabei insbesondere denjenigen Theil dieser Wege näher ins Auge zu fassen, der beschrieben wird, während der bewegliche Punkt, z. B. $a_{,,}$, den Parabelbogen zwischen den beiden anderen, fest gedachten Punkten $a_{,}$, $a_{,,,}$ durchmißt.

§. 14.

Zuvörderst gehen wir dazu über die Weggleichung für den Schwerpunkt des Tangentendreiecks festzustellen.

Es seien

$$x_{,} = \frac{y_{,}^2}{p} \quad \Big| \quad x_{,,,} = \frac{y_{,,,}^2}{p}$$
$$y_{,} \quad \Big| \quad y_{,,,}$$

die Coordinaten der beiden festen Parabelpunkte $a_{,}$ und $a_{,,,}$. Ebenso

$$x = \frac{y^2}{p}$$
$$y$$

die des beweglichen Punktes $a_{,,}$. Dann sind die Coordinaten des von den beiden ortsbeständigen Tangenten gebildeten Durchschnittspunktes

$$X_{,} = \frac{y_{,}y_{,,,}}{p}$$
$$Y_{,} = \frac{y_{,} + y_{,,,}}{2},$$

hingegen die Coordinaten der beiden von der beweglichen Tangente mit den festen Tangenten erzeugten Schnittpunkte, welche Schnittpunkte immer zugleich die Eckpunkte des veränderlichen Tangentendreiecks darstellen:

$$X_{,,,} = \frac{y_{,}y}{p} \quad\Big|\quad X_{,,} = \frac{yy_{,,,}}{p}$$
$$Y_{,,,} = \frac{y_{,} + y}{2} \quad\Big|\quad Y_{,,} = \frac{y + y_{,,,}}{2}.$$

Werden die laufenden Coordinaten des Schwerpunktes mit ξ, ω bezeichnet, so hat man bekanntermaßen die Relationen:

$$\xi = \frac{y_{,}y + y_{,}y_{,,,} + y_{,,,}y}{3p}, \quad \omega = \frac{y_{,} + y + y_{,,,}}{3}.$$

Nach y geordnet, kommt:

$$\xi = \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3p} \cdot y + \frac{y_{,}y_{,,,}}{3p}; \quad \omega = \tfrac{1}{3}\, y + \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3}.$$

Um aus diesen beiden Gleichungen die Beziehung zwischen ξ und ω zu finden, multiplicire man die letzte derselben mit $\frac{y_{,} + y_{,,,}}{p}$, dann erhält man:

$$\frac{y_{,} + y_{,,,}}{p} \cdot \omega = \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3p} \cdot y + \frac{(y_{,} + y_{,,,})^2}{3p}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von der ersten und nachheriges Ordnen erscheint:

$$\omega = \frac{p}{y_{,} + y_{,,,}} \cdot \xi + \frac{y_{,}^2 + y_{,}y_{,,,} + y_{,,,}^2}{3\,(y_{,} + y_{,,,})},$$

woraus folgt:

Der Weg des Schwerpunktes irgend eines Tangentendreiecks, von dem zwei Seiten als fest

vorausgesetzt werden, indeß die dritte längs der Parabel sich hinzieht, ist eine gerade Linie.

§. 15.

Die Gleichung der durch die beiden festen Punkte $a_{,}$ und $a_{,,,}$ sich erstreckenden Sehne ist:

$$y = \frac{p}{y_{,} + y_{,,,}} x + \frac{y_{,} y_{,,,}}{y_{,} + y_{,,,}}$$ und, wenn man dieselbe mit der im vorigen Paragraphen für den Weg des Schwerpunkts entwickelten zusammenhält, so gewahrt man leicht die Identität der constanten Coëfficienten von x, so daß wir das Resultat des vorigen Paragraphen erweitern dürfen in den Satz:

Der Schwerpunkt des Tangentendreiecks beschreibt während der stetigen Ortsveränderung der einen Tangente eine zur festen Sehne parallele Gerade.*)

§. 16.

Der Weggleichung für den Schwerpunkt des eingeschriebenen Dreiecks liegen die Beziehungen zu Grunde:

$$\alpha = \frac{y_{,}^2 + y^2 + y_{,,,}^2}{3p}; \; \beta = \frac{y_{,} + y + y_{,,,}}{3},$$

vorausgesetzt, daß wir die laufenden Coordinaten des fraglichen Schwerpunkts durch α, β andeuten und auch hier wieder die Coordinaten der zwei festen und des einen veränderlichen Parabelpunktes mit

$x_{,} = \frac{y_{,}^2}{p}$	$x_{,,,} = \frac{y_{,,,}^2}{p}$	$x = \frac{y^2}{p}$
$y_{,}$	$y_{,,,}$	y

bezeichnen.

*) Durch ein Paar einfache Schlüsse folgt hieraus der Lehrsatz, daß die Mitten der veränderlichen Seite des Tangentendreiecks die zur festen Sehne parallele Berührungslinie zum geometrischen Ort haben.

cf. Steiner's Vorl. über synth. Geom., bearb. v. Geiser, §. 20, p. 132.

Durch Elimination von y erhält man als Resultante der beiden obigen Gleichungen:

$$\alpha = \frac{(3\beta - y_{,} - y_{,,,})^2}{3p} + \frac{y_{,}^2 + y_{,,,}^2}{3p}, \text{ oder:}$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{p}{3}\alpha - \frac{y_{,}^2 + y_{,,,}^2}{9}} + \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3} .$$

Unterzieht man diese letztere Gleichung einer zweimaligen Coordinatenverwandlung, indem man einmal

$$\alpha - \frac{y_{,}^2 + y_{,,,}^2}{3p} = \gamma$$

und nach geschehener Substitution alsdann

$$\sqrt{\gamma} + \sqrt{\frac{3}{p}} \cdot \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3} = \sqrt{\delta}$$ setzt, so geht

dieselbe nach einander in die folgenden Formen über:

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{p}{3}\gamma} + \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3}$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{p}{3}\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I).$$

In (I) liegt uns aber die Scheitelgleichung einer Parabel vor mit dem Parameter $\frac{p}{3}$. Somit hat man den Satz:

Der Schwerpunkt des Sehnendreiecks erzeugt, während sich einer seiner Eckpunkte auf der gegebenen Parabel fortbewegt, eine neue Parabel, deren Parameter ein Dritttheil der Hauptparabel ist.

§. 17.

Die Gleichung der festen, durch den Parabelpunkt x, y, laufenden Tangente ist:

$$2yy_{,} - p(x + x_{,}) = 0 \text{ (§. 1.)},$$

die Weggleichung für den Schwerpunkt des Tangentendreiecks:

$$y = \frac{p}{y_, + y_{,,,}} x + \frac{y_,^2 + y_, y_{,,,} + y_{,,,}^2}{3(y_, + y_{,,,})} (§. 14).$$

Durch Elimination von y erhalten wir als Abscisse des Durchschnittspunktes beider Geraden:

$$x_0 = \frac{2y_, y_{,,,}^2 - y_,^3 - y_,^2 y_{,,,}}{3p\,(y_{,,,} - y_,)}.$$

Die Abscisse des Punktes $A_{,,}$ ist:

$$\alpha_{,,} = \frac{y_, y_{,,,}}{p},$$

die des Punktes $a_,$ ist $= x_,$.

Nun ist offenbar die Projection der Tangentenstrecke $A_{,,}a_,$ auf der XAxe

$$= x_, - \frac{y_, y_{,,,}}{p} = \frac{y_,^2 - y_, y_{,,,}}{p},$$

wogegen die Projection von $A_{,,}\ e$

$$= \frac{2y_, y_{,,,}^2 - y_,^3 - y_,^2 y_{,,,}}{3p\,(y_{,,,} - y_{,,})} - \frac{y_, y_{,,,}}{p}$$

$$= \frac{y_,^2 - y_, y_{,,,}}{3p},$$

mithin die Projection der Tangentenstrecke $A_{,,}\ e$, ein Dritttheil von der Projection der Tangentenstrecke $A_{,,}a_,$ folglich auch die Tangentenstrecke $A_{,,}e$ selbst ein Dritttheil von der Tangentenstrecke $A_{,,}a_,$, mit anderen Worten:

Die Gerade, längs welcher der Schwerpunkt des Tangentendreiecks fortschreitet, wenn die eine Tangente variirt, theilt die Tangentenstrecke $A_{,,}a_,$ in dem Verhältniß von 1:2, und da die in Rede stehende Gerade, wie vorhin gezeigt, mit der Sehne $a_,a_{,,,}$ gleichlaufend ist, so zerlegt sie auch die andere Tangentenstrecke $A_{,,}a_{,,,}$ nach dem gleichen Verhältnisse. In beiden Fällen liegt der größere Streckentheil nach den Berührungspunkten zu.

§. 18.

Führt man in Gleichung (I) des §. 16 statt δ wieder seinen Werth in α ein, bezieht man also die gefundene Parabel auf das Hauptcoordinatensystem. Bestimmt man hierauf die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte, die aus dem Zusammentreffen der festen Sehne $a_{,}a_{,,,}$ mit der Parabel gebildet werden, indem man die betreffenden y und x gleich setzt, berechnet sodann ganz ähnlich, wie dies im letzten Paragraphen geschehen, aus den nunmehr bekannten Abscissen der verschiedenen Punkte durch zweckentsprechende, aus dem bloßen Anblicke der Figur sich ergebende algebraische Summirung die Projectionen erstens der ganzen festen Sehne auf der XAxe und zweitens die Projectionen der einzelnen Sehnentheile, in welche die ganze Sehne zu Folge ihrer Begegnung mit der Schwerpunktsparabel zerfällt, so gelangt man zu dem Endergebniß: Die beiden Durchschnittspunkte der festen Sehne mit der Schwerpunktsparabel der Sehnendreiecke theilen die genannte Sehne in drei gleiche Theile.

§. 19.

Sind die am Schlusse des vorigen Paragraphen genannten, auf der festen Sehne gelegenen Durchschnittspunkte d und d^1, während die Schnittpunkte der beiden unverrückbaren Tangenten mit der den Weg des Schwerpunkts vom Tangentendreieck darstellenden, in §. 14 untersuchten Geraden durch e und $e_{,}$ bezeichnet sind, so überzeugt man sich durch reine Anschauung leicht von der Wahrheit der folgenden Bemerkungen: Die Punkte e und $e_{,}$ sind als Schwerpunkte derjenigen Tangentendreiecke zu betrachten, die entstehen, wenn die Tangente $A_{,}A_{,,}$ im Fortgange ihrer Bewegung sich der festen Tangente $A_{,,}a_{,,}$ beziehungsweise $A_{,,,}a_{,,,}$ unendlich genähert hat, und unter derselben Voraussetzung, d. h. ebenfalls in den beiden Grenzlagen der variabelen Tangente erscheinen die beiden Punkte d und d^1 als Schwer-

punkte der an der Grenze auftretenden Sehnendreiecke.

In dieser Bemerkung liegt zugleich der einfachste, weil intuitive Beweis für die in den §§. 17 und 18 analytisch hergeleiteten Facta.

§. 20.

Da e und d nach dem eben Gesagten als Schwerpunkte eines Paars correspondirender Parabeldreiecke zu betrachten sind, so lauft ihre Verbindungslinie nach §. 1 mit der Parabelaxe parallel. Wir können dies, wofern wir uns nur die Lage von e und d ins Gedächtniß zurückrufen, auch so aussprechen:

Wenn man in einem aus zwei Tangenten und einer Sehne erzeugten Dreiecke von einem der beiden Berührungspunkte aus auf der Tangente $^2/_3$, auf der Sehne $^1/_3$ ihrer resp. Längen abmißt, so werden dadurch zwei Punkte festgelegt — der eine auf der Tangente, der andere auf der Sehne — deren Verbindungslinie zur Parabelaxe parallel geht.

Hiermit tritt uns im Laufe unserer Untersuchung zum zweiten Male — nur in etwas verhüllterer Form — der Lehrsatz entgegen, daß jede von dem Schnittpunkte zweier Tangenten mit der Parabelaxe parallel geführte Gerade die Berührungssehne halbirt.

§. 21.

Im fünften Paragraphen dieser Abhandlung haben wir für den Punkt l in Fig. 1, der bekanntermaßen den zu den drei Schwerpunkten der Tangentialsehnendreiecke gehörigen Schwerpunkt darstellt, die Coordinaten gefunden:

$$\gamma_{,,,} = \frac{2y_{,}^2 + 2y_{,,}^2 + 2y_{,,,}^2 + y_{,}y_{,,} + y_{,,}y_{,,,} + y_{,}y_{,,,}}{9p}$$

$$\delta_{,,,} = \frac{y_{,} + y_{,,} + y_{,,,}}{3}.$$

Es sei der Weg dieses Punktes zu bestimmen, wenn einer

der Parabelpunkte variirt. Zu dem Ende nehmen wir die Coordinaten $x_{,,,}, y_{,,}$ als veränderlich an und schreiben statt ihrer x,y; bezeichnen ferner die laufenden Coordinaten des gesuchten Wegs durch ξ und ω. Dann verwandeln sich die beiden obigen Gleichungen in

$$\xi = \frac{2y_{,}^2 + 2y^2 + 2y_{,,,}^2 + y_{,}y + yy_{,,,} + y_{,}y_{,,,}}{9p}$$

$$\omega = \frac{y_{,} + y + y_{,,,}}{3}$$

Nach y geordnet und hierauf y weggeschafft, erscheint:

$$\xi = \frac{2}{p}\left(\omega - \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3}\right)^2 + \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3p}\left(\omega - \frac{y_{,} + y_{,,,}}{3}\right) + \frac{2(y_{,}^2 + y_{,,,}^2) + y_{,}y_{,,,}}{9p}.$$

In Bezug auf ω aufgelöst, folgt:

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{p}{2}.\ \xi - \frac{2(y_{,}^2 + y_{,,,}^2) + y_{,}y_{,,,}}{9} + \frac{(y_{,} + y_{,,,})^2}{9.16}} + \frac{y_{,} + y_{,,,}}{4},$$

oder, in abgekürzter Form:

$\omega = \pm\sqrt{\frac{p}{2}.\ \xi - C} + C^1$, aus welcher sofort mit Hilfe der bereits in §. 16 zur Anwendung gebrachten Mittel die noch einfachere Form

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{p}{2}.\ \delta}$$

abgeleitet werden kann.

Wie man sieht, ist auch der Weg des in vorliegendem Paragraphen untersuchten Schwerpunktes eine Parabel und zwar eine solche, deren Parameter die Hälfte des Parameters der Hauptparabel ausmacht.

§. 22.

Schreiten wir endlich noch zur Aufstellung der Gleichung für den Weg des Schwerpunkts der drei Parabelsegmente,

indem wir die Ausdrücke für die Coordinaten dieses Schwerpunkts

$$\alpha_{\prime\prime} = \frac{4(y_{\prime}^2 + y_{\prime\prime}^2 + y_{\prime\prime\prime}^2) + y_{\prime}y_{\prime\prime} + y_{\prime\prime}y_{\prime\prime\prime} + y_{\prime}y_{\prime\prime\prime}}{15p}$$

$$\beta_{\prime\prime} = \frac{y_{\prime} + y_{\prime\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{3}$$

aus §. 8 entlehnen und die laufenden Coordinaten der gesuchten Curve wiederum mit ξ,ω andeuten, so ist der Zusammenhang zwischen ξ,ω implicite durch die beiden Gleichungen

$$\xi = \frac{4(y_{\prime}^2 + y^2 + y_{\prime\prime\prime}^2) + y_{\prime}y + y_{\prime\prime\prime}y_{\prime} + yy_{\prime\prime\prime}}{15p}$$

$$\omega = \frac{y_{\prime} + y_{\prime\prime\prime} + y}{3}$$

gegeben, worin y an die Stelle von $y_{\prime\prime}$ getreten ist und als veränderlich betrachtet wird.

Nach y geordnet, kommt:

$$\xi = \frac{4}{15p}y^2 + \frac{y_{\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{15p}y + \frac{4(y_{\prime}^2 + y_{\prime\prime\prime}^2) + y_{\prime}y_{\prime\prime\prime}}{15p}$$

$$\omega = \frac{1}{3}y + \frac{y_{\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{3}.$$

Durch Elimination von y:

$$\xi = \frac{4}{15p}(3\omega - y_{\prime} - y_{\prime\prime\prime})^2 + \frac{y_{\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{15p}(3\omega - y_{\prime} - y_{\prime\prime\prime}) + \frac{4(y_{\prime}^2 + y_{\prime\prime\prime}^2) + y_{\prime}y_{\prime\prime\prime}}{15p}$$

Isoliren wir ω, so erhalten wir:

$$\omega = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{4}p\xi - \frac{4(y_{\prime}^2 + y_{\prime\prime\prime}^2) + y_{\prime}y_{\prime\prime\prime}}{4} + \left(\frac{y_{\prime} + y_{\prime\prime\prime}}{8}\right)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{7y_{\prime} + 7y_{\prime\prime\prime}}{8}$$

Abgekürzt:

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{5}{12}p.\xi - C^1} + C$$

aus welcher Form klar hervorleuchtet, daß wir es auch im

gegenwärtigen Falle mit einer Parabel zu thun haben, sowie daß deren Parameter fünf Zwölftel vom Parameter der Hauptparabel beträgt.

§. 23.

Zur Erleichterung der Uebersicht wird es gut sein, den wesentlichen Inhalt der letzten Paragraphen hier noch einmal kurz zusammen zu fassen. Derselbe würde etwa folgendermaßen zu lauten haben:

Die vier Punkte t, l, m und s (Fig. 1), von denen der erste den Schwerpunkt des Tangentendreiecks, der zweite den des Sehnendreiecks, der dritte den der Tangentialsehnendreiecke, der vierte endlich den der Parabelsegmente darstellt, beschreiben, während einer der drei Parabelpunkte seinen Ort in der Parabel stetig verändert, gewisse Bahnen und zwar der eine t eine mit der festbleibenden Sehne parallele Gerade, die drei anderen erzeugen Parabeln, bezw. von den Parametern $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, wenn man den Parameter der Hauptparabel zur Einheit nimmt.

§. 24.

Wird die Strecke ts (Fig. 1) zwischen dem Schwerpunkte des Tangenten- und dem des Sehnendreiecks mit l_0 bezeichnet, dann ist nach dem Früheren:

$$\text{Strecke } tl = \frac{2}{3} l_0,$$

$$\text{Strecke } ms = \frac{1}{5} l_0,$$

$$\text{Strecke } lm = tm - tl = \frac{4}{5} l_0 - \frac{2}{3} l_0 = \frac{2}{15} l_0.$$

Bildet man das Product aus der Strecke ts und lm, so kommt:

$$ts.lm = \frac{2}{15} l_0{}^2.$$

Das gleiche Resultat entspringt aus einer Multiplication der beiden anderen Strecken, nämlich

$$tl.ms = \frac{2}{15} l_0^2,$$

also:

Das Product aus der ganzen Strecke und dem mittleren Theile ist gleich dem Producte aus den beiden äußeren Theilen, oder mit anderen Worten:

Die Strecke zwischen dem Schwerpunkte des Tangentendreiecks und dem des Sehnendreiecks wird von dem Schwerpunkte der Parabelsegmente und dem der Tangentialsehnendreiecke harmonisch getheilt.

§. 25.

Als eine einfache Erweiterung des eben kennen gelernten Satzes ist der folgende anzusehen:

Die von der Parabel der Sehnendreiecke und der Geraden der Tangentendreiecke auf den Durchmessern der Hauptparabel abgegrenzten Strecken werden sammt und sonders von der Parabel der Tangentialsehnendreiecke und der der Segmente harmonisch getheilt.

Eine Strecke ad (Fig. 4) kann allerdings durch zwei auf ihr liegende Punkte b und c auf unendlich vielerlei Art harmonisch getheilt werden. Immer aber muß das Verhältniß $\frac{ac}{cd}$ doppelt so groß sein als das Verhältniß $\frac{ab}{bd}$, d. h. wenn $\frac{ac}{cd} = 2x$, ist $\frac{ab}{bd} = x$. In unserem Falle nun wird die harmonische Theilung von den Parabelpunkten in der Weise bewirkt, daß das kleinere der vorerwähnten Verhältnisse = 2 und demnach das größere = 4 ist. Mit dieser Bemerkung verschwindet die den beiden letzten Sätzen noch anhaftende Unbestimmtheit.

§. 26.

1. Da eine von $A_{,,}$ aus mit der Parabelaxe parallel ge-

führte Gerade die Sehne $a_, a_{,,}$ halbirt, so liegen auf dieser Geraden — außer selbstredend dem Durchschnittspunkt $A_{,,}$ der beiden Tangenten sowie dem Mittelpunkt der Sehne $a_, a_{,,}$ selbst — noch der Schwerpunkt des Tangentialsehnendreiecks $A_{,,} a_, a_{,,,}$, sowie auch (nach §. 6) der Schwerpunkt des zu der Sehne $a_, a_{,,}$ gehörigen Parabelsegments.

2. Zufolge §. 20 lauft die Verbindungslinie der beiden Punkte e und d (die als Schwerpunkte des Tangenten- und des Sehnendreiecks zu betrachten sind, wenn die bewegliche Tangente in die Grenzlage $a_, A_{,,}$ übergetreten ist) mit der Parabelaxe parallel. Auf dieser selben Verbindungslinie liegen demnach sowohl der Schwerpunkt der betreffenden, d. h. der Grenzlage der variabelen Tangente entsprechenden Tangentialsehnendreiecke als auch der Schwerpunkte der correspondirenden Parabelsegmente. Diese beiden Schwerpunkte bilden im Verein mit den beiden Punkten e und d ein harmonisches Punktsystem (§. 24).

3. Nun ist klar, daß, wenn die bewegliche Tangente ihre Grenzlage $A_{,,} a_,$ erreicht, die drei Tangentialsehnendreiecke $A_{,,} a_, a_{,,,}$, $A_, a_, a_{,,}$, $A_{,,,} a_{,,} a_{,,,}$ übergehen in $A_{,,} a_, a_{,,,}$, $A_{,,} a_, a_{,,,}$ und den Punkt $a_,$ und ebenso die drei Parabelsegmente sich verwandeln in zweimal das Segment $a_, a_{,,} a_{,,,}$ und gleichfalls den Punkt $a_,$. In diesem Falle repräsentirt nach geometrischer Anschauungsweise der Schwerpunkt des Dreiecks $A_{,,} a_, a_{,,,}$ gleichwie der Schwerpunkt des Segments $a_, a_{,,} a_{,,,}$ einen Doppelpunkt, deren jeder mit dem Punkte $a_,$, auf den sich in der Grenzlage einerseits das Tangentialsehnendreieck $A_, a_, a_{,,}$, andererseits das Parabelsegment $a_, t, a_{,,}$ reduciren, in Verbindung stehen. Der Schwerpunkt des einen dieser Drei-Punktsysteme liegt alsdann auf der Strecke zwischen dem Punkte $a_,$ und dem Schwerpunkt des Dreiecks $A_{,,} a_, a_{,,,}$ und zwar um $\frac{2}{3}$ dieser Strecke vom Punkte $a_,$ entfernt. Der Schwerpunkt des anderen Dreipunktssystems liegt hingegen auf der Strecke zwischen demselben Punkte $a_,$ und dem Schwerpunkte des Pa-

rabelsegments über der Sehne $a_, a_{,,,}$ wieder um $\frac{2}{3}$ dieser Strecke vom Punkte $a_,$ entfernt.

4. Aus (2) ergibt sich, daß der Schwerpunkt (nach math. Begriffe) der Tangentialsehnendreiecke auf der Parallelen ed, aus (3), daß er auf dem Strahle liegt, der den Punkt $a_,$ mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $A_{,,} a_, a_{,,,}$ verbindet, daß mithin dieser Strahl die Strecke ed in demjenigen Punkte durchschneiden muß, der als Schwerpunkt der Tangentialsehnendreiecke zu betrachten ist. Ein Gleiches gilt von dem Strahle, der den Punkt $a_,$ mit dem Schwerpunkte des über der Sehne $a_, a_{,,,}$ befindlichen Segments verbindet; derselbe begegnet der Parallelen ed in demjenigen Punkte, der in der Grenzlage als Schwerpunkt der drei Parabelsegmente erscheint.

5. Die beiden in 4 erwähnten Strahlen bilden mithin in Verbindung mit der Tangente $a_, A_{,,}$ und der Sehne $a_, a_{,,,}$ ein harmonisches Strahlenbüschel, da sie durch vier auf der Strecke ed harmonisch gelegene Punkte laufen. Gleichzeitig folgt aus (1) und (3), daß die vier Harmonikalen mit der von $A_{,,}$ aus zur Parabelaxe parallel gezogenen Geraden in denjenigen vier Punkten zusammentreffen, auf die in (1) hingewiesen worden ist. Gemäß einer der metrischen Grundbeziehungen an harmonischen Gebilden findet daher der Satz seine Begründung:

Der Durchschnittspunkt zweier beliebigen Parabeltangenten, der Mittelpunkt der zugehörigen Berührungssehne, der Schwerpunkt des aus den beiden Tangenten und der Sehne erzeugten Dreiecks sowie der Schwerpunkt des von der Sehne abgeschnittenen Parabelsegments bilden ein harmonisches Punktsystem.

§. 27.

Wiewohl die Beweisführung, deren wir uns im vorhergehenden Paragraphen bedient haben, vollkommen stringent ist, ihr sogar, wie jedem genetischen Verfahren, was Anschau-

lichkeit betrifft der Vorzug vor jeder anderen Beweisart gebührt, indem sie namentlich klar erkennen läßt, in welcher Weise der gegenwärtige Satz aus einem frühern und allgemeinern hervorgeht und gewissermaßen nur als specieller Fall dieses letzteren erscheint, so wollen wir doch, um einen in jeder Beziehung unabhängigen Beweis zu haben, den Satz des letzten Paragraphen auch noch durch analytische Schlüsse herleiten.

Es seien nämlich $x_{,}y_{,}; x_{,,,}y_{,,,}$ die Coordinaten der beiden Parabelpunkte, dann werden die Coordinaten des Tangentendurchschnitts dargestellt durch:

$$\frac{y_{,}y_{,,,}}{p}, \quad \frac{y_{,}+y_{,,,}}{2} \text{ (§. 1)},$$

des Sehnenmittelpunkts durch:

$$\frac{x_{,}+x_{,,,}}{2} = \frac{y_{,}^2+y_{,,,}^2}{2p}, \quad \frac{y_{,}+y_{,,,}}{2},$$

während die Coordinaten des durch die Verbindungslinie der beiden ebenerwähnten Punkte getroffenen Parabelpunktes alsdann sein werden:

$$\frac{(y_{,}+y_{,,,})^2}{4p}, \quad \frac{y_{,}+y_{,,,}}{2}.$$

Nun hat die zwischen dem Tangentendurchschnitt und der Sehnenmitte befindliche Strecke offenbar zur senkrechten Projection:

$$\frac{x_{,}+x_{,,,}}{2} - \frac{y_{,}y_{,,,}}{p} = \frac{y_{,}^2-2y_{,}y_{,,,}+y_{,,,}^2}{2p} \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

dagegen die Strecke vom Parabelpunkt bis zur Sehnenmitte:

$$\frac{x_{,}+x_{,,,}}{2} - \frac{(y_{,}+y_{,,,})^2}{4p} = \frac{y_{,}^2-2y_{,}y_{,,,}+y_{,,,}^2}{4p},$$

demnach die Strecke vom Schwerpunkt des Segments bis zur Sehnenmitte:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{y_{,}^2-2y_{,}y_{,,,}+y_{,,,}^2}{4p}$$

und endlich die Strecke vom Tangentendurchschnitt bis zum Segmentsschwerpunkt:

$$\frac{y_{,}^2 - 2y_{,}y_{,,,} + y_{,,,}^2}{2p} - \frac{y_{,}^2 - 2y_{,}y_{,,,} + y_{,,,}^2}{10p}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{y_{,}^2 - 2y_{,}y_{,,,} + y_{,,,}^2}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II).$$

Es schneidet mithin der Segmentsschwerpunkt vier fünftel der von dem Tangentendurchschnitte und der Sehnenmitte umfaßten Strecke ab, und da der Dreiecksschwerpunkt $\frac{2}{3}$ derselben Strecke abgrenzt, so wird die Strecke durch beide Schwerpunkte harmonisch getheilt.

§. 28.

Ehe wir diese Betrachtung beschließen, wollen wir noch denjenigen Fall etwas näher ins Auge fassen, wo eine der Sehnen, z. B. $a_{,}a_{,,,}$, senkrecht zur Parabelaxe steht.
Die Gleichung

$$\omega = \frac{p}{y_{,} + y_{,,,}} \cdot \xi + \frac{y_{,}^2 + y_{,}y_{,,,} + y_{,,,}^2}{3(y_{,} + y_{,,,})}$$

aus §. 14 wird in diesem besonderen Falle unbrauchbar, da alsdann ihre Constanten unter der unbestimmten Form $\frac{\text{Constans}}{\text{Null}}$ erscheinen. Isoliren wir hingegen ξ, so nimmt unter übrigens denselben Umständen die Gleichung eine deutungsfähige Form an; sie reducirt sich nämlich für $y_{,} = - y_{,,,}$ auf:

$$\xi = - \frac{y_{,}^2 + y_{,}y_{,,,} + y_{,,,}^2}{3p} = - \frac{y_{,}^2}{3p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I),$$

in Worten, da $\frac{y_{,}^2}{p} = x_{,}$;

Steht (Fig. 1) die feste Sehne $a_{,}a_{,,,}$ perpendikulär zur Axe, so nimmt die Gerade, welche den Weg des Schwerpunkts der Tangentendreiecke darstellt, gleichfalls eine senkrechte Lage zur Axe an (§. 15), und zwar befindet sich dieselbe auf der Seite der negativen Abscissen in einer Entfernung vom Anfangs-

punkte, die ein Drittheil der Abscisse des Punktes $a_,$ oder $a_{,,,}$ beträgt.

Es fließt hieraus eigenthümlicher Weise der bekannte Satz, daß die Subtangente der Parabel im Scheitel halbirt wird. Denn ist mb der Weg des Schwerpunkts der Tangentendreiecke, dann muß nach dem Obigen (Fig. 5):

$$bd = \frac{1}{3}\, df, \text{ also}$$

$$bf = bd + df = \frac{4}{3} df = \frac{4}{3} x,$$

sein. Nach §. 17 ist ferner:

$$ab = \frac{1}{2} bf = \frac{2}{3} x_{,,}$$

folglich:

$$af = 2x, \ .$$

§. 29.

Tritt zu den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen noch die weitere Annahme, daß der Winkel der constanten Tangenten 60° betrage, dann wird:

$$\frac{y_,}{2x_,} = tg\ 30^0, \text{ oder}$$

$$\frac{y_,}{2.\frac{y_,^2}{p}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ mithin: } y_, = \frac{\sqrt{3}}{2} . p,$$

so daß die Gleichung (I) des vorigen Paragraphen sich vereinfacht in:

$$\xi = -\frac{p}{4},$$

welche Gleichung aussagt,

daß der Schwerpunkt der Tangentendreiecke die Directrix beschreibt, wenn die beiden festen Tangenten sich unter einem Winkel von 60° auf der Axe begegnen.

§. 30.

Immer unter denselben Bedingungen sind die Abscissen

der Punkte $A_{\prime\prime}; a_{\prime}; a_{\prime\prime\prime}$ (deren geometrische Bedeutung aus der Figur erhellt) beziehungsweise:

$$-\frac{3p}{4}, +\frac{3p}{4}, +\frac{3p}{4},$$

ihre Ordinaten:

$$0, +\frac{p}{2}\sqrt{3}, -\frac{p}{2}\sqrt{3}.$$

Wenn man nun ferner mit ω die Ordinate des als veränderlich angenommenen Parabelpunktes $a_{\prime\prime}$ bezeichnet, dann werden die betreffenden Tangentendurchschnitte nach §. 1 auszudrücken sein durch:

$$x_{\prime\prime} = -\frac{3}{4}p, y_{\prime\prime} = 0$$

$$x_{\prime\prime\prime} = -\omega\frac{\sqrt{3}}{2}, y_{\prime\prime\prime} = \frac{2\omega - p\sqrt{3}}{4}$$

$$x_{\prime} = \omega\frac{\sqrt{3}}{2}, y_{\prime} = \frac{2\omega + p\sqrt{3}}{4}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung:

$$(y_{\prime\prime} + y_{\prime\prime\prime} - 2y_{\prime})x - (x_{\prime} + x_{\prime\prime} - 2x_{\prime})y + x_{\prime\prime}y_{\prime} - x_{\prime}y_{\prime\prime}$$
$$+ x_{\prime\prime\prime}y_{\prime} - x_{\prime}y_{\prime\prime\prime} = 0,$$

wodurch eine der drei Mittellinien eines Dreiecks mit den Eckcoordinaten $x_{\prime}y_{\prime}; x_{\prime\prime}y_{\prime\prime}; x_{\prime\prime\prime}y_{\prime\prime\prime}$ analytisch dargestellt wird, dann erhält man:

$$\left(0 + \frac{2\omega - p\sqrt{3}}{4} - 2\,\frac{2\omega + p\sqrt{3}}{4}\right)x$$

$$-\left(-\frac{3}{4}p - \omega\frac{\sqrt{3}}{2} - \omega\sqrt{3}\right)y$$

$$+\left(-\frac{3}{4}p.\,\frac{\omega + \frac{p}{2}\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\omega\sqrt{3}}{2}.\,0$$

$$-\omega\frac{\sqrt{3}}{2}.\,\frac{2\omega + p\sqrt{3}}{4} - \frac{\omega\sqrt{3}}{2}.\frac{2\omega - p\sqrt{3}}{4}$$

$$= \text{Null}.$$

Wird nun hierin $x = -\frac{p}{4}$ gesetzt, dann erfahren wir aus dem Werthe von y, in welchem Abstande vom Fußpunkte

der Directrix diese letztere von der Mittellinie getroffen wird. Nach gehöriger Reduction kommt auf diese Weise:

$$-3\left(\frac{p}{4}+\frac{\omega\sqrt{3}}{2}\right)y=-\omega\left(\frac{p}{4}+\frac{\omega\sqrt{3}}{2}\right) \text{ oder:}$$

$$y=\frac{1}{3}\omega, \text{ d. h.}$$

der Schwerpunkt des veränderlichen Tangentendreiecks liegt auf der Directrix, stets im Sinne der Ordinate des veränderlichen Parabelpunkts und in einer Entfernung vom Fußpunkte der Directrix, die gleich ist einem Dritttheile der variirenden Ordinate.

§. 31.

Widmen wir bei dieser Gelegenheit auch den drei übrigen merkwürdigen Punkten des Dreiecks, dem Höhenschnitt, dem Mittelpunkt des umschriebenen und dem des eingeschriebenen Kreises eine flüchtige Betrachtung, so wissen wir, daß der Höhenschnitt des Tangentendreiecks unter allen Umständen auf der Directrix liegt, umsomehr also unter den von uns angenommenen speciellen Voraussetzungen, und da nach einem anderen, nicht weniger bekannten Satze der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises mit dem Schwerpunkte und dem Höhenschnitte immer in einer Geraden liegen, so gehört auch erwähnter Mittelpunkt der Directrix an. Um nun für jede Lage der beweglichen Tangente den Ort dieser beiden Punkte auf der Directrix bestimmen zu können, bedarf es nur noch der Untersuchung des Höhenschnitts, insofern der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises durch die Lage des Schwerpunkts und des Höhenschnitts bedingt ist und als hinlänglich gegeben betrachtet werden darf. Es ist aber die Gleichung einer Höhenlinie, wenn man mit $X_,Y_,;X_{,,}Y_{,,};X_{,,,}Y_{,,,}$ die Coordinaten der Ecken bezeichnet:

$$(X_{,,}-X_{,,,})x+(Y_{,,}-Y_{,,,})y+X_,X_{,,,}+Y_,Y_{,,,}-X_,X_{,,}-Y_,Y_{,,}=0.$$

Bedenkt man nun, daß in unserem Falle:

3*

$$X_{,,} = \frac{y_{,}y_{,,,}}{p};\ Y_{,,} = \frac{y_{,} + y_{,,,}}{2};$$

$$X_{,,,} = \frac{\omega y_{,}}{p};\ Y_{,,,} = \frac{\omega + y_{,}}{p};$$

$$X_{,} = \frac{\omega y_{,,,}}{p};\ Y_{,} = \frac{\omega + y_{,,,}}{2},$$

wenn man mit $y_{,,}y_{,,,}$ die Ordinaten der beiden festen und mit ω die der beweglichen Tangente bezeichnet, so geht durch Substitution dieser Werthe die obige Gleichung über in:

$$\frac{y_{,}.y_{,,,} - y_{,}.\omega}{p}.x + \frac{y_{,,,} - \omega}{2}.y - \frac{(y_{,}y_{,,,} - y_{,}\omega)\omega.y_{,,,}}{p^2}$$

$$- \frac{y_{,,,}^2 - \omega^2}{4} = 0.$$

Wird hierin $x = -\frac{p}{4}$ und $y_{,} = -y_{,,,} = p\frac{\sqrt{3}}{2}$ gesetzt, so erhält man im zugehörigen Werthe von y die jedesmalige Entfernung des Höhenpunkts vom Fußpunkte der Directrix, nämlich:

$$y = \frac{2\omega.p\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-p\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{p^2} + \frac{\omega + p\frac{\sqrt{3}}{2} - p\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$= -\omega.$$

Wir ersehen also hieraus,

daß die Entfernung des Höhenpunktes vom Fußpunkte der Directrix genau ebenso wächst wie die Parabelordinate, nur immer in einem der Ordinate des variabelen Berührungspunktes entgegengesetztem Sinne.

§. 32.

Eine Combination der Resultate der beiden letzten Paragraphen zeigt uns zunächst, daß Höhenpunkt und Schwerpunkt sich in entgegengesetzter Richtung und mit Geschwindigkeiten auf der Directrix bewegen, die sich verhalten wie 3:1.

Diese Data genügen aber, um unter Hinzuziehung be-

kannter Sätze sofort auch die Bewegung des Mittelpunkts vom umschriebenen Kreise festzustellen, wobei es sich von selbst versteht, daß man ebenso wie dies beim Höhen- und Schwerpunkt geschehen, sehr wohl auch ein directes Ermittelungsverfahren zur Anwendung bringen könnte. — Die y des Höhenschnitts und des Schwerpunkts in den §§. 30 und 31 verschwinden mit ω, d. h. beide fallen zu gleicher Zeit mit dem Fußpunkte der Directrix zusammen, und da, wie bekannt, dem Höhenpunkt vom Schwerpunkte immer eine doppelt so große Entfernung zukommt als diesem letzteren vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises, so muß, wenn die eine Entfernung Null wird, dies auch die andere werden. Also fällt nicht blos der Schwerpunkt sondern auch jener Mittelpunkt des umschriebenen Kreises mit dem Höhenschnitt in dem Augenblicke zusammen, wo dieser durch den Fußpunkt der Directrix geht — alles Erscheinungen, die sich ohne Weiteres aus den Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks herleiten lassen, wobei man nur in Erwägung zu ziehen hat, daß in dem besonderen Falle, der uns jetzt beschäftigt, unser Tangentendreieck eben in ein solches Dreieck sich verwandelt. Nennen wir nun die Entfernung des Höhenschnitts vom Fußpunkte der Directrix in einem gewissen Momente $\frac{3}{3}$; dann befindet sich der Schnittpunkt der Mittellinien auf der entgegengesetzten Seite dieses Fußpunktes in einer Entfernung $\frac{1}{3}$. Auf derselben Seite und in einer Entfernung $\frac{2}{3}$ vom Schwerpunkte — nämlich der Hälfte des Abstandes der beiden ersten Punkte — demnach in einer Entfernung $\frac{3}{3}$ vom Fußpunkte der Leitlinie, befindet sich aber auch, dem oben angezogenen Satze zufolge, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so daß wir zur Behauptung berechtigt sind:

Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises liegt

immer mit dem Schwerpunkte gleichzeitig ober- oder unterhalb der Abscissenaxe und zwar in einem Abstande vom Fußpunkte der Leitlinie, der genau die Größe der jeweiligen Ordinate des veränderlichen Berührungspunktes besitzt.

§. 33.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen und unmittelbare geometrische Anschauung gelangt man betreffs des Mittelpunkts des eingeschriebenen Kreises zu dem Resultate:

Der Schnittpunkt der Winkelhalbirungslinien erreicht in demselben Augenblicke den Fußpunkt der Leitlinie, wo auch die drei anderen Punkte ihn durchschreiten, setzt alsdann jedoch seinen Weg nicht in der Directrix sondern in der Parabelaxe fort bis zum Durchschnitte der beiden festen Tangenten, von wo aus er eine wieder im Fußpunkte der Leitlinie endigende rückläufige Bewegung antritt. Ueberhaupt vollendet derselbe zwischen den angegebenen Grenzpunkten eine ganze Schwingung, während der bewegliche Parabelpunkt den von den beiden festen Berührungspunkten eingeschlossenen Parabelbogen einmal durchläuft.

Alles dies ließe sich ohne erhebliche Schwierigkeit und ganz ähnlich wie beim Höhen- und Schwerpunkte auf analytischem Wege darthun, doch liegt dies außer dem Zwecke gegenwärtiger Abhandlung, in welcher den drei übrigen merkwürdigen Dreieckspunkten nur eine ganz vorübergehende, durch eine Eigenthümlichkeit des Höhenschnitts erregte Aufmerksamkeit zugewandt werden konnte und bei welcher es nur darauf ankam, sich der Verschiedenheiten bewußt zu werden, welche stattfinden, wenn neben dem Schwerpunkte gleichzeitig noch mehrere andere merkwürdige Punkte auf der Directrix sich bewegen.

§. 34.

Zum Schlusse unserer Untersuchung möge auch noch eine kurze Betrachtung desjenigen Falles hier eine Stelle finden, wo nur eine der Parabeltangenten als fest angenommen wird, dagegen die beiden anderen ihre Lage unaufhörlich und zwar in der Weise verändern, daß der Scheitel des Tangentenwinkels immer auf einer gegebenen Geraden liegt. Alsdann sind augenscheinlich sämmtliche Eckpunkte des Tangentendreiecks in einer continuirlichen Ortsveränderung begriffen, und wenn man die Ordinate des festen Berührungspunktes durch $y_{\prime\prime}$, die der beiden wandelbaren Parabelpunkte durch y und λ andeutet, so werden die Coordinaten jener Eckpunkte zu bezeichnen sein mit:

$$\alpha_{\prime} = \frac{y.y_{\prime\prime}}{p};\ \beta_{\prime} = \frac{y + y_{\prime\prime}}{2}$$

$$\alpha_{\prime\prime} = \frac{y.\lambda}{p};\ \beta_{\prime\prime} = \frac{y + \lambda}{2}$$

$$\alpha_{\prime\prime\prime} = \frac{y_{\prime\prime}.\lambda}{p};\ \beta_{\prime\prime\prime} = \frac{y_{\prime\prime} + \lambda}{2}\ .$$

Um auszudrücken, daß der Scheitel des von den beiden veränderlichen Tangenten gebildeten Winkels eine Gerade zum geometrischen Ort hat, haben wir nur nöthig, die Coordinaten $\alpha_{\prime\prime}\beta_{\prime\prime}$ dieses Scheitelpunktes der Bedingung

$$\frac{y + \lambda}{2} = a.\ \frac{y.\lambda}{p} + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

zu unterwerfen, wo a und c willkürliche Constanten bedeuten.

Stellen nun ξ, ω die laufenden Schwerpunktscoordinaten für das veränderliche Tangentendreieck dar, so ist die Aufgabe die, aus den Gleichungen:

$$\xi = \frac{y.y_{\prime\prime} + y.\lambda + y_{\prime\prime}.\lambda}{3p};\ \omega = \frac{y + \lambda + y_{\prime\prime}}{3} \ldots\ldots \text{(II)}$$

in Gemeinschaft mit Gleichung (I) die zwischen ξ und ω be=

stehende Relation festzustellen. Substituirt man auf Grund von (I) für $y\lambda$ den Werth

$$\frac{p}{2a}(y+\lambda)-\frac{pc}{a}$$

in die Gleichung (II), so erscheint:

$$\xi = \frac{(y+\lambda)\,y_{\prime\prime} + (y+\lambda)\cdot\ \frac{p}{2a} - \frac{pc}{a}}{3p};$$

$$\omega = \frac{1}{3}(y+\lambda)+\frac{y_{\prime\prime}}{3}.$$

Aus diesem Gleichungspaar $(y+\lambda)$ eliminirt, führt zur Resultante:

$$\xi = \frac{2ay_{\prime\prime}+p}{2ap}\cdot\omega - \frac{(2ay_{\prime\prime}+p)\,y_{\prime\prime}+2pc}{6ap} \quad \ldots . \text{(III)},$$

oder:

$$\omega = \frac{2ap}{2ay_{\prime\prime}+p}\cdot\xi + \text{Constans}.$$

Der geometrische Ort des Schwerpunkts im Tangentendreieck ist also wiederum eine Gerade.

§. 35.

Damit diese Gerade mit der Leitlinie zusammenfällt, müssen die Constanten a und c der Geraden (I) so gewählt werden, daß sich die Gleichung (III) auf $\xi = -\frac{p}{4}$ reducirt und hierzu ist erforderlich, daß a und c die Bedingungen erfüllen:

$$\frac{2ay_{\prime\prime}+p}{2ap} = 0$$

$$-\frac{(2ay_{\prime\prime}+p)y_{\prime\prime}+2pc}{6ap} = -\frac{p}{4},$$

daß demnach

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$c = -\frac{3p}{8} \text{ wird,}$$

ein Resultat, was zum Theil allerdings vorauszusehen, insofern jedoch mehr oder weniger unerwartet kommt, als der Werth von a auch nicht einmal mehr von dem Parabelparameter influirt wird. Nicht blos also, daß die Schwerpunkte sämmtlicher Tangentendreiecke einer Parabel, von denen eine Ecke die Bedingungsgleichung

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3p}{8}$$

erfüllt, in die Directrix fallen; es wird auch noch außerdem, wenn sich der Parabelparameter ändert, durch die vorstehende Bedingungsgleichung ein System paralleler Geraden dargestellt, so daß mithin für die verschiedensten Parabeln die in Frage stehende Gerade doch immer einen constanten Winkel mit der Axe bildet.

§. 36.

Um weiter die Relation zwischen ξ und ω zu finden, womit unter den Voraussetzungen des §. 34 die laufenden Coordinaten des Schwerpunkts vom Sehnendreieck angedeutet werden sollen, hat man aus den drei Gleichungen:

$$\xi = \frac{y^2 + \lambda^2 + y_{,,}^2}{3p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\omega = \frac{y + \lambda + y_{,,}}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

cf. §. 1, (2)

$$\frac{y+\lambda}{2} = a.\frac{y.\lambda}{p} + c. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$ [cf. §. 34 (I)]

y und λ zu eliminiren. Nun zieht man aus (3)

$$\frac{y+\lambda}{3a} - \frac{2c}{3a} = \frac{2y.\lambda}{3p}.$$

Diese Gleichung zu (1) addirt, kommt:

$$\xi - \frac{2c}{3a} + \frac{y+\lambda}{3a} = \frac{(y+\lambda)^2}{3p} + \frac{y_{,,}^2}{3p}.$$

Sodann $(y + \lambda)$ vermöge der Gleichung (2) fortgeschafft, erscheint:

$$\xi = \frac{2pc + ay_{,,}^2}{3ap} = \frac{a(3\omega - y_{,,})^2 - p(3\omega - y_{,,})}{3ap}.$$

In Bezug auf ω aufgelöst, folgt:

$$\omega = + \sqrt{\frac{p}{3} \cdot \xi - \frac{8apc + 4a^2y_{,,}^2 + p^2}{36a^2}} + \frac{2ay_{,,} + p}{6a},$$

oder, abgekürzt:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{p}{3} \cdot \xi - C} + C^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Als geometrischer Ort des Schwerpunkts vom Sehnendreieck erscheint mithin abermals eine Parabel, deren Parameter $= \frac{p}{3}$.

§. 37.

Die Ermittelung der geometrischen Oerter des Schwerpunkts der Parabelsegmente sowie der Tangentialsehnendreiecke könnte, ähnlich wie dies in den §§. 34 und 36 für die beiden anderen Schwerpunkte geschehen, durch directe Behandlung der unter den gegebenen Verhältnissen bestehenden Bedingungsgleichungen bewirkt werden. Einfacher indessen gelangen wir zum Ziele, wenn wir uns auf die im §. 9 erwähnten constanten Beziehungen stützen. Hiernach muß nämlich, falls mit $x_,$ die Abscisse des Schwerpunkts im Tangentendreieck und mit $\xi_,$ die des Schwerpunkts im Sehnendreiecke bezeichnet wird, für die Abscisse x des Schwerpunkts der Tangentialsehnendreiecke die Relation stattfinden:

$$x = \frac{2}{3}(x_, - \xi_,) + \xi_, = \frac{1}{3}(2x_, + \xi_,) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

und für die Abscisse x des Schwerpunktes der Parabelsegmente:

$$x = \frac{4}{5}(x_, - \xi_,) + \xi_, = \frac{1}{5}(4x_, + \xi_,) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Berücksichtigt man nun, daß vermöge der Gleichung (III) im §. 34:

$$\xi_{,} = \frac{2ay_{,,} + p}{2ap} \cdot y + C,$$

vermöge (I) im §. 36:

$x_{,} = \frac{3y^2}{p} + C^1 . y + C''$ sein muß, so erhält man einerseits:

$$x = \frac{1}{3}\left[2\left(\frac{3y^2}{p} + C'.y + C''\right) + \frac{2ay_{,,} + p}{2ap} \cdot y + C\right]$$

andererseits:

$$x = \frac{1}{5}\left[4\left(\frac{3y^2}{p} + C^1 y + C''\right) + \frac{2ay_{,,} + p}{2ap} \cdot y + C\right].$$

Endlich liefert eine angemessene Transformation für:

1. Den geometrischen Ort des Schwerpunkts der Tangentialsehnendreiecke die Gleichung:

$$y = \pm \sqrt{\frac{p}{2} \cdot x + C} + C^1$$

2. Den geometrischen Ort des Schwerpunkts der Parabelsegmente:

$$y = \pm \sqrt{\frac{5p}{12} \cdot x + C''} + C'''.$$

In beiden Fällen also beschreiben die Schwerpunkte Parabeln, im ersten eine solche, die $\frac{p}{2}$, im zweiten eine, die $\frac{5p}{12}$ zum Parameter hat.

§. 38.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß die Tangentenlage, die wir zu Anfang unserer Untersuchung als beständig, nachher, im weiteren Verlaufe derselben, als nach bestimmten Gesetzen variirend annahmen, auch noch anderen und überhaupt den mannigfaltigsten Aenderungsweisen unterworfen werden kann. Jedenfalls bleibt der mathematischen Phantasie in dieser Richtung der weiteste Spielraum. Wir müssen uns indessen darauf beschränken, die Aufmerksamkeit des Lesers hier nur noch auf die eigenthümlichen geometrischen Erscheinungen hinzulenken, die eintreten werden, wenn eine der Pa-

rabeltangenten als ortsbeständig vorausgesetzt wird, und die beiden anderen einen constanten Winkel mit einander einschließen. Da diese Annahme, wie man weiß, darauf hinausläuft, daß die Bewegung des betreffenden Winkelscheitels auf einer Hyperbel von gewisser Lage und gewissen Maßverhältnissen vor sich geht, so dürfen wir mit einiger Wahrscheinlichkeit auch bezüglich unserer Schwerpunktsbahnen charakteristische Resultate erwarten. Welche Wege man übrigens dem Tangentendurchschnitt auch vorschreiben, welche Bedingungen man in die Aufgabe auch einführen mag; unter allen Umständen bleiben die harmonischen Beziehungen, deren in den §§. 24 und 25 Erwähnung geschehen, davon gänzlich unberührt. Man muß sie deshalb für den Gegenstand unserer Untersuchung als besonders bezeichnend betrachten.

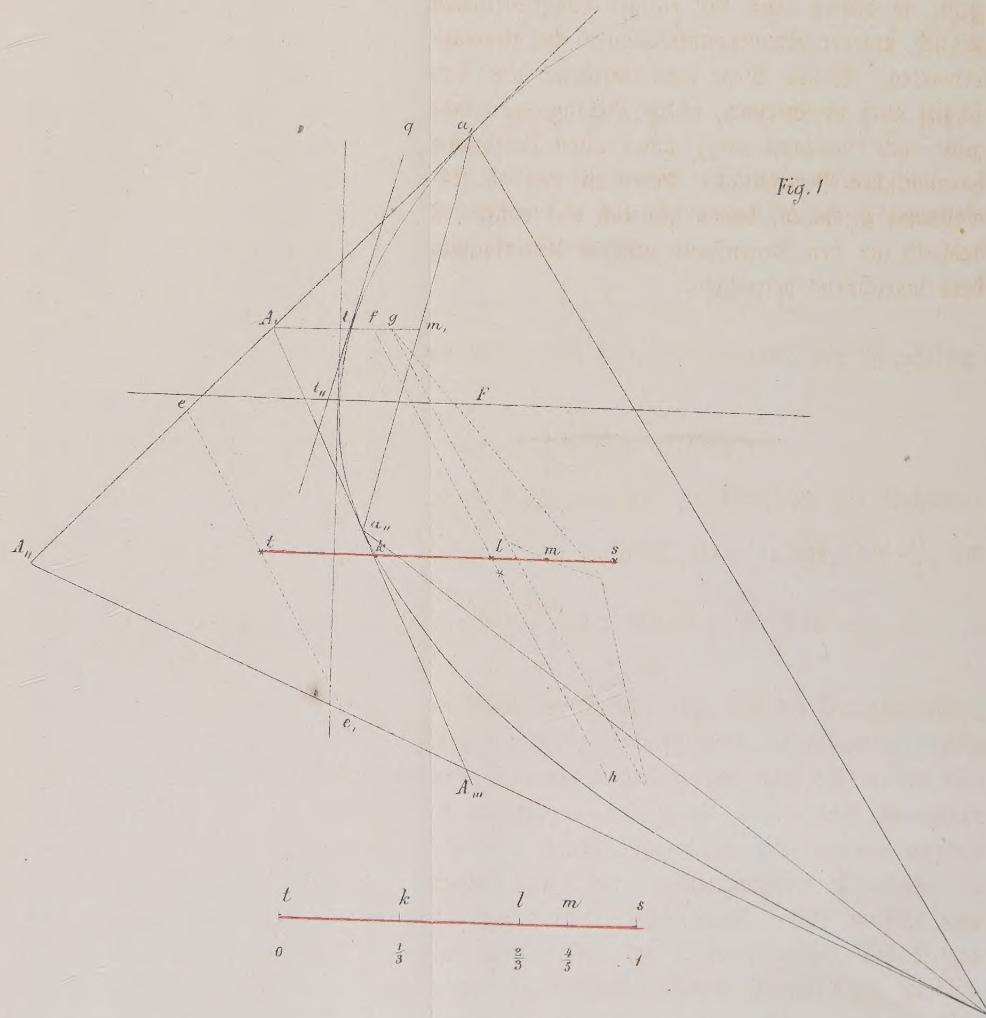


Fig. 1

Fig. 2.

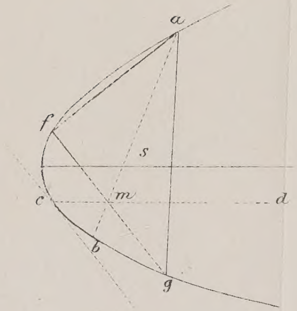


Fig. 3.

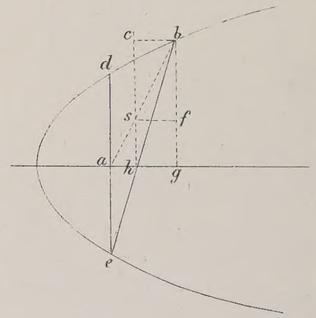


Fig. 4.

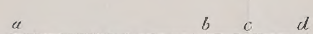


Fig. 5.

